Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathématiques
Niveau supérieur
Épreuve 3 – analyse

Lundi 8 mai 2017 (après-midi)

1 heure

Instructions destinées aux candidats

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[50 points]**.

2217 – 7222

International Baccalaureate
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n’a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l’aide d’une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d’un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 7]

Utilisez la règle de L’Hôpital pour déterminer la valeur de

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x\ln(1+x)}.$$

2. [Note maximale : 6]

Soit la série de Maclaurin pour $\tan x$

$$\tan x = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \ldots$$

où a_1, a_3 et a_5 sont des constantes.

(a) Trouvez la série pour $\sec^2 x$, en fonction de a_1, a_3 et a_5, jusqu’au terme contenant x^4 inclusivement

(i) en trouvant la dérivée de la série pour tan x ci-dessus ;

(ii) en utilisant la relation $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$. [3]

(b) À partir de là, en comparant vos deux séries, déterminez les valeurs de a_1, a_3 et a_5. [3]

3. [Note maximale : 9]

Utilisez le critère de l'intégrale pour déterminer si la série infinie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ est convergente ou divergente.

4. [Note maximale : 13]

(a) Considérez l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{y}{x}\right), x > 0 .$$

Utilisez la substitution $y = vx$ pour montrer que la solution générale de cette équation différentielle est

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{f(v) - v} = \ln x + \text{Constante}.$$ [3]

(b) À partir de là ou par toute autre méthode, résolvez l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2 + 3xy + y^2}{x^2}, \ x > 0 ,$$

étant donné que $y = 1$ lorsque $x = 1$. Donnez votre réponse sous la forme $y = g(x)$. [10]

5. [Note maximale : 15]

Considérez la courbe $y = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$.

(a) En dessinant un diagramme et en considérant l'aire d'une région appropriée sous la courbe, montrez que pour $r > 0$,

$$\frac{1}{r+1} < \ln\left(\frac{r+1}{r}\right) < \frac{1}{r}.$$ [4]

(b) À partir de là, étant donné que n est un entier positif supérieur à un, montrez que

(i) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} > \ln(1+n)$;

(ii) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} < 1 + \ln n$. [6]

Soit $U_n = \displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} - \ln n$.

(c) À partir de là, étant donné que n est un entier positif supérieur à un, montrez que

(i) $U_n > 0$;

(ii) $U_{n+1} < U_n$. [4]

(d) Expliquez pourquoi ces deux résultats prouvent que $\{U_n\}$ est une suite convergente. [1]